Категорія Т (Комп’ютерні науки, Системний аналіз, Кібербезпека)

1. Скласти рівняння сторін трикутника АВС, якщо відомі одна з його вершин **а також рівняння висоти **ібісектриси ** які проведені з однієї вершини.

Розв’язання.

Перевіряємо, що точка А не належитьвисоті та бісектрисі.

Знаходимо**З умовиперпендикулярностімаємо:**Будемошукатирівнянняпрямої АС за формулою прямої, яка проходить через точку**іззаданимкутовимкоефіцієнтом: **

**

3. Точку В знаходимо як перетинвисоти і бісектриси:

**

**

**

4.Рівняння АВ складемо, скориставшисярівняннямпрямої, яка проходить через двізадані точки:

**

рівняння АВ.

5. Кут АВЕ позначимо через **







Cкористаємосярівнянням (1) (маємот.Вта).

рівняння ВС.

Відповідь: 

1. Два однотипнихпідприємства А і В виробляютьпродукцію з однією і тією ж самою оптовою відпускноюціною m за один виріб. Автопарк, якийобслуговуєпідприємство А, оснащений більшсучасними і потужнимивантажнимиавтівками. В результатіцьоготранспортнівитрати на перевезення одного виробускладають для підприємства А 10 грн. на 1 км, а для підприємства В – 20 грн. на 1 км. Відстаньміжпідприємствами 300 км. Як територіально повинен бути розподіленийриноксбутуміждвомапідприємствами для того, щобвитратиспоживачів при купівлівиробів та їхтранспортуваннібулимінімальними?

Розв’язання.

На осі Ох відкладемовідстаньміж А і В, розташувавши початок координат в точці А. Розглянемо, скількискладутьвитратиспоживача, щознаходиться в довільнійточціПри доставцівантажу з пункту А цівитратибудутьдорівнюватиа з пункту В – 

 Знайдемомножину тих точок, для якихвитрати при доставці з пункту А і В будутьоднакові.

 Математичноцявимогазаписуєтьсярівнянням:

або

причому:



Тоді: 







 Дане рівняння є рівнянням кола з центром щолежить на осіабсцис і радіусом 200 км. Для всіхпунктів, які лежать на коліцьогорадіуса, витрати на придбаннявиробівбудутьоднакові при доставці з пунктів А і В.

Якщоспоживач буде знаходитисьвсередині круга, то вигіднішекупувативироби у пункті В, а якщозовні круга – то в пункті А.

1. Обчислити границю $\lim\_{n\to \infty }A\_{n}^{n}$, якщо$A\_{n}=\left(\begin{matrix}\frac{2}{n}&\frac{2}{n}\\1&1\end{matrix}\right)$.

Розв’язання:

Виконуємо множення матриць:

$A\_{n}^{2}=\left(\begin{matrix}\frac{2}{n}&\frac{2}{n}\\1&1\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}\frac{2}{n}&\frac{2}{n}\\1&1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{2}{n}∙\frac{2}{n}+\frac{2}{n}&\frac{2}{n}∙\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\\\frac{2}{n}+1&\frac{2}{n}+1\end{matrix}\right)=\left(\frac{2}{n}+1\right)∙A\_{n}$.

Аналогічно отримуємо: $A\_{n}^{3}=\left(\frac{2}{n}+1\right)^{2}∙A\_{n}$.

Зрозуміло, що $A\_{n}^{n}=\left(\frac{2}{n}+1\right)^{n-1}∙A\_{n}$.

Переходимо до границі

$\lim\_{n\to \infty }A\_{n}^{n}=\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{2}{n}+1\right)^{n-1}A\_{n}=e^{2}∙\left(\begin{matrix}0&0\\1&1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0&0\\e^{2}&e^{2}\end{matrix}\right)$.

Відповідь: $\lim\_{n\to \infty }A\_{n}^{n}=\left(\begin{matrix}0&0\\e^{2}&e^{2}\end{matrix}\right)$

1. Є колода з 36 карт. Скількома способами можнавитягнутиневпорядкованийнабір з 5 карт так, щоб точно булилише 1♦ карта, 1 дама, 2♣ карти?

**Розв’язання.** Розглянемовипадки:

1. Середобраних карт є бубнова дама.

Бубнову даму можна обрати єдиним способом, двіхрестовікартибудутьобиратись з 8, оскількихрестова дама не може бутиобрана, й число способіввиборудвоххрестових карт дорівнює До трьохобраних карт необхіднододатищедвікарти так, щоб вони не були бубнами, дамами, й хрестовими картами.

Таких карт в колоді 16. Число невпорядкованихвибірок з 16 по 2 без повтореньдорівнює За правилом добутку, число способіввибору 5 карт, середяких є бубнова дама, дорівнює



1. Середобраних карт є хрестова дама.

Хрестову даму можна обрати єдиним способом, іншухрестову карту можна обрати 8 способами. Одну бубнову карту можна обрати також 8 способами (бубнову даму обирати не можна). До трьохобраних карт необхіднододатищедвікарти так, щоб вони не були бубнами, дамами, й хрестовими картами.

Таких карт в колоді 16. Число способіввиборуцих карт, як вжерозглядалосьраніше, дорівнює 120. За правилом добутку, число способіввибору 5 карт, середяких є хрестова дама, дорівнює



1. Середобранихп’яти карт немаєбубновоїдами, немаєхрестовоїдами.

Обираємо одну даму з двох (2 способи), одну бубнову карту, яка не є дамою (8 способів), двіхрестовікарти, середякихнемаєдами, обираємо способами. Залишилось обрати одну карту, яка не є дамою, не є бубною, не є хрестовою. Таких карт в колоді 16, отжемаємо 16 способіввибору. За правилом добутку, число способіввибору 5 карт, середякихнемаєбубновоїдами, немаєхрестовоїдами, є 1 бубнова карта є 2 хрестовідорівнює



1. Загальне число способіввибірки 5 карт, щозадовольняютьумовузадачі, за правилом сумидорівнює



**Відповідь:** 

1. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f\left(x\right)=(6x+7)^{\frac{3}{2}}-9x+4$,

Якщо відомо, що ця дотична не містить точок з рівними координатами.

Розв’язання:

Якщо дотична не містить точок з рівними координатами, то пряма – бісектриса першого-третього координатного кута $y=x$не перетинає цю дотичну, тобто є паралельною їй. Отже кутовий коефіцієнт шуканої дотичної дорівнює 1.

Знайдемо похідну

$$f'\left(x\right)=((6x+7)^{\frac{3}{2}}-9x+4)'=\frac{3}{2}∙\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}∙6-9=9∙\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}-9$$

Маємо рівняння для пошуку абсциси дочки дотику

$$9∙\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}-9=1$$

$$\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{10}{9}$$

$$\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{10}{9}$$

$$6x+7=\frac{100}{81}$$

$$6x=\frac{100}{81}-7$$

$$6x=-\frac{467}{81}$$

$x\_{0}=-\frac{467}{486}$ – абсциса точки дотику.

Обчислюємо значення функції в точці дотику $f\left(-\frac{467}{486}\right)=\frac{6269}{162}$

Маємо рівняння дотичної $y=x+\frac{6269}{162}$

1. Знайти всі неперервні функції $f:R\rightarrow R$, що задовольняють рівняння

 $3∙f\left(2x+1\right)=f\left(x\right)+5x$.

Розв’язання

Будемо шукати розв’язок у вигляді лінійної функції з невизначеними коефіцієнтами. Нехай $f\left(x\right)=a\_{0}+a\_{1}x$ . Тоді $f\left(2x+1\right)=a\_{0}+a\_{1}(2x+1)$

Отже$3(a\_{0}+a\_{1}(2x+1))=a\_{0}+a\_{1}x+5$ ,

Прирівнюючикоефіцієнти за однаковихстепенів х, маємо

$$\left\{\begin{array}{c}6a\_{1}=a\_{1}+5\\3a\_{0}+3a\_{1}=a\_{0}\end{array}\right.$$

Відповідно $a\_{0}=-{3}/{2}, a\_{1}=1$

Отже, $f\left(x\right)=-\frac{3}{2}+x$

Доведемо, щоіншогорозв’язку не існує.

 Нехай $g\left(x\right)=f\left(x\right)-f\_{1}(x)$.

Оскільки

$$3∙f\left(2x+1\right)=f\left(x\right)+5x$$

$$3∙f\_{1}\left(2x+1\right)=f\_{1}\left(x\right)+5x$$

$$3∙g\left(2x+1\right)=g\left(x\right)$$

Розв’яжеморівняння$3∙g\left(2x+1\right)=g\left(x\right)$

Замінимо$x$ на $\frac{x-1}{2}$.

В одержаномурівняннізновузамінимо$x$ на $\frac{x-1}{2}$.:

$$g\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{1}{3}g\left(\frac{x-1}{2^{2}}\right) ⟹g\left(x\right)=\frac{1}{3^{2}}g\left(\frac{x-2^{2}+1}{2^{2}}\right)$$

Продовжуючиподібним чином, у результатімаємо

$$g\left(x\right)=\frac{1}{3^{n}}g\left(\frac{x-2^{n}+1}{2^{n}}\right), n=1,2,3,…$$

Унаслідок неперервності $g\left(x\right)$ для довільного $x$

$$\lim\_{n\to \infty }g\left(\frac{x-2^{n}+1}{2^{n}}\right)=g\left(-1\right) ⟹ g\left(x\right)=0$$

1. Розв’язати диференціальне рівняння

$y^{'}sinx-ycosx=-\left(\frac{sinx}{x}\right)^{2}\lim\_{x\to \infty }y(x)=0$*.*

Легко помітити що $\frac{y^{'}sinx-ycosx}{sin^{2}x}=-\frac{1}{x^{2}}$

$$\left(\frac{y}{sinx}\right)^{'}=\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\frac{y}{sinx}$=$\frac{1}{x}+C$

$$y=\frac{sinx}{x}+Csinx$$

З умови $\lim\_{x\to \infty }y\left(x\right)=0$маємо $y=\frac{sinx}{x}.$

Відповідь: $y=\frac{sinx}{x}.$

Категорія С (Економічна кібернетика, Менеджмент)

1. Скласти рівняння сторін трикутника АВС, якщо відомі одна з його вершин **а також рівняння висоти **ібісектриси ** які проведені з однієї вершини.

Розв’язання.

Перевіряємо, що точка А не належитьвисоті та бісектрисі.

Знаходимо**З умовиперпендикулярностімаємо:**Будемошукатирівнянняпрямої АС за формулою прямої, яка проходить через точку**іззаданимкутовимкоефіцієнтом: **

**

3. Точку В знаходимо як перетинвисоти і бісектриси:

**

**

**

4.Рівняння АВ складемо, скориставшисярівняннямпрямої, яка проходить через двізадані точки:

**

рівняння АВ.

5. Кут АВЕ позначимо через **







Cкористаємосярівнянням (1) (маємот.Вта).

рівнянняВС.

Відповідь: 

1. Два однотипнихпідприємства А і В виробляютьпродукцію з однією і тією ж самою оптовою відпускноюціноюm за один виріб. Автопарк, якийобслуговуєпідприємство А, оснащений більшсучасними і потужнимивантажнимиавтівками. В результатіцьоготранспортнівитрати на перевезення одного виробускладають для підприємства А 10 грн. на 1 км, а для підприємства В – 20 грн. на 1 км. Відстаньміжпідприємствами 300 км. Як територіально повинен бути розподіленийриноксбутуміждвомапідприємствами для того, щобвитратиспоживачів при купівлівиробів та їхтранспортуваннібулимінімальними?

Розв’язання.

На осі Ох відкладемовідстаньміж А і В, розташувавши початок координат в точці А. Розглянемо, скількискладутьвитратиспоживача, щознаходиться в довільнійточціПри доставцівантажу з пункту А цівитратибудутьдорівнюватиа з пункту В – 

 Знайдемомножину тих точок, для якихвитрати при доставці з пункту А і В будутьоднакові.

 Математичноцявимогазаписуєтьсярівнянням:

або

причому:



Тоді: 







 Дане рівняння є рівнянням кола з центром щолежить на осіабсцис і радіусом 200 км. Для всіхпунктів, які лежать на коліцьогорадіуса, витрати на придбаннявиробівбудутьоднакові при доставці з пунктів А і В.

Якщоспоживач буде знаходитисьвсередині круга, то вигіднішекупувативироби у пункті В, а якщозовні круга – то в пункті А.

1. Обчислити границю $\lim\_{n\to \infty }A\_{n}^{n}$, якщо$A\_{n}=\left(\begin{matrix}\frac{2}{n}&\frac{2}{n}\\1&1\end{matrix}\right)$.

Розв’язання:

Виконуємо множення матриць:

$A\_{n}^{2}=\left(\begin{matrix}\frac{2}{n}&\frac{2}{n}\\1&1\end{matrix}\right)∙\left(\begin{matrix}\frac{2}{n}&\frac{2}{n}\\1&1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{2}{n}∙\frac{2}{n}+\frac{2}{n}&\frac{2}{n}∙\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\\\frac{2}{n}+1&\frac{2}{n}+1\end{matrix}\right)=\left(\frac{2}{n}+1\right)∙A\_{n}$.

Аналогічно отримуємо: $A\_{n}^{3}=\left(\frac{2}{n}+1\right)^{2}∙A\_{n}$.

Зрозуміло, що $A\_{n}^{n}=\left(\frac{2}{n}+1\right)^{n-1}∙A\_{n}$.

Переходимо до границі

$\lim\_{n\to \infty }A\_{n}^{n}=\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{2}{n}+1\right)^{n-1}A\_{n}=e^{2}∙\left(\begin{matrix}0&0\\1&1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0&0\\e^{2}&e^{2}\end{matrix}\right)$.

Відповідь: $\lim\_{n\to \infty }A\_{n}^{n}=\left(\begin{matrix}0&0\\e^{2}&e^{2}\end{matrix}\right)$

1. Є колода з 36 карт. Скількома способами можнавитягнутиневпорядкованийнабір з 5 карт так, щоб точно булилише 1♦ карта, 1 дама, 2♣ карти?

**Розв’язання.** Розглянемовипадки:

1. Середобраних карт є бубнова дама.

Бубнову даму можна обрати єдиним способом, двіхрестовікартибудутьобиратись з 8, оскількихрестова дама не може бутиобрана, й число способіввиборудвоххрестових карт дорівнює До трьохобраних карт необхіднододатищедвікарти так, щоб вони не були бубнами, дамами, й хрестовими картами.

Таких карт в колоді 16. Число невпорядкованихвибірок з 16 по 2 без повтореньдорівнює За правилом добутку, число способіввибору 5 карт, середяких є бубнова дама, дорівнює



1. Середобраних карт є хрестова дама.

Хрестову даму можна обрати єдиним способом, іншухрестову карту можна обрати 8 способами. Одну бубнову карту можна обрати також 8 способами (бубнову даму обирати не можна). До трьохобраних карт необхіднододатищедвікарти так, щоб вони не були бубнами, дамами, й хрестовими картами.

Таких карт в колоді 16. Число способіввиборуцих карт, як вжерозглядалосьраніше, дорівнює 120. За правилом добутку, число способіввибору 5 карт, середяких є хрестова дама, дорівнює



1. Середобранихп’яти карт немаєбубновоїдами, немаєхрестовоїдами.

Обираємо одну даму з двох (2 способи), одну бубнову карту, яка не є дамою (8 способів), двіхрестовікарти, середякихнемаєдами, обираємо способами. Залишилось обрати одну карту, яка не є дамою, не є бубною, не є хрестовою. Таких карт в колоді 16, отжемаємо 16 способіввибору. За правилом добутку, число способіввибору 5 карт, середякихнемаєбубновоїдами, немаєхрестовоїдами, є 1 бубнова карта є 2 хрестовідорівнює



Загальне число способіввибірки 5 карт, щозадовольняютьумовузадачі, за правилом сумидорівнює



**Відповідь:** 

1. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $f\left(x\right)=(6x+7)^{\frac{3}{2}}-9x+4$,

Якщо відомо, що ця дотична не містить точок з рівними координатами.

Розв’язання:

Якщо дотична не містить точок з рівними координатами, то пряма – бісектриса першого-третього координатного кута $y=x$не перетинає цю дотичну, тобто є паралельною їй. Отже кутовий коефіцієнт шуканої дотичної дорівнює 1.

Знайдемо похідну

$$f'\left(x\right)=((6x+7)^{\frac{3}{2}}-9x+4)'=\frac{3}{2}∙\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}∙6-9=9∙\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}-9$$

Маємо рівняння для пошуку абсциси дочки дотику

$$9∙\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}-9=1$$

$$\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{10}{9}$$

$$\left(6x+7\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{10}{9}$$

$$6x+7=\frac{100}{81}$$

$$6x=\frac{100}{81}-7$$

$$6x=-\frac{467}{81}$$

$x\_{0}=-\frac{467}{486}$ – абсциса точки дотику.

Обчислюємо значення функції в точці дотику $f\left(-\frac{467}{486}\right)=\frac{6269}{162}$

Маємо рівняння дотичної $y=x+\frac{6269}{162}$

1. Знайти всі неперервні функції $f:R\rightarrow R$, що задовольняють рівняння

 $3∙f\left(2x+1\right)=f\left(x\right)+5x$.

Розв’язання

Будемо шукати розв’язок у вигляді лінійної функції з невизначеними коефіцієнтами. Нехай $f\left(x\right)=a\_{0}+a\_{1}x$ . Тоді $f\left(2x+1\right)=a\_{0}+a\_{1}(2x+1)$

Отже$3(a\_{0}+a\_{1}(2x+1))=a\_{0}+a\_{1}x+5$ ,

Прирівнюючикоефіцієнти за однаковихстепенів х, маємо

$$\left\{\begin{array}{c}6a\_{1}=a\_{1}+5\\3a\_{0}+3a\_{1}=a\_{0}\end{array}\right.$$

Відповідно $a\_{0}=-{3}/{2}, a\_{1}=1$

Отже, $f\left(x\right)=-\frac{3}{2}+x$

Доведемо, щоіншогорозв’язку не існує.

 Нехай $g\left(x\right)=f\left(x\right)-f\_{1}(x)$.

Оскільки

$$3∙f\left(2x+1\right)=f\left(x\right)+5x$$

$$3∙f\_{1}\left(2x+1\right)=f\_{1}\left(x\right)+5x$$

$$3∙g\left(2x+1\right)=g\left(x\right)$$

Розв’яжеморівняння$3∙g\left(2x+1\right)=g\left(x\right)$

Замінимо$x$ на $\frac{x-1}{2}$.

В одержаномурівняннізновузамінимо$x$ на $\frac{x-1}{2}$.:

$$g\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{1}{3}g\left(\frac{x-1}{2^{2}}\right) ⟹g\left(x\right)=\frac{1}{3^{2}}g\left(\frac{x-2^{2}+1}{2^{2}}\right)$$

Продовжуючиподібним чином, у результатімаємо

$$g\left(x\right)=\frac{1}{3^{n}}g\left(\frac{x-2^{n}+1}{2^{n}}\right), n=1,2,3,…$$

Унаслідок неперервності $g\left(x\right)$ для довільного $x$

$$\lim\_{n\to \infty }g\left(\frac{x-2^{n}+1}{2^{n}}\right)=g\left(-1\right) ⟹ g\left(x\right)=0$$

1. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном об’ємом 32 м3 , щоб на облицювання його стін і дна було витрачено якнайменше матеріалу.

Розв’язання

Нехай сторона квадрата – що є дном басейну має сторону $x$. Тоді глибина басейну $h=\frac{32}{x^{2}}$.

Знайдемо цільову функцію, що дорівнює сумі площ стін та дна:

$S\left(x\right)=x^{2}+\frac{32}{x^{2}}∙4x=x^{2}+\frac{128}{x}$.

Досліджуємо дану функцію на найменше значення

$S^{'}\left(x\right)=\left(x^{2}+\frac{128}{x}\right)^{'}=2x-\frac{128}{x^{2}}=\frac{2x^{3} -128}{x^{2}}=0$*.*

$x=4$ є критичною точкою, в якій функція досягає найменшого значення. Розмір басейна: дно квадратне зі стороною 4 м, глибина басейна – 2 м.