school behavior,» Systems, Man and Cybernetics, SMC. IEEE International Conference on, 2008, pp. 2646-2651.

7. Madadi A., Motlagh M. (2014) Optimal Control of DC motor using Grey Wolf Optimizer Algorithm // Technical Journal of Engineering and Applied Science. Vol. 4(4).

8. Mirjalili S., Lewis. A. (2014) Grey Wolf Optimizer // Advances in Engineering Software. Vol. 69.

9. Santosh K. S., Vinod, K. G. (2015) Genetic Algorithms: Basic Concepts and Real World Applications. International Journal of Electrical, Electronics and Computer Systems (IJEECS), 3 (12).

10. Sha-Sha Guo, Jie-Sheng Wang, Xiao-Xu Ma (2019) Improved bat algorithm based on multipopulation strategy of island model for solving global function optimization problem / Mode of access: https://www.hindawi.com/journals/cin/2019/6068743/.

11. Suganthi Jeyasingh (2017) Modified Bat Algorithm for Feature Selection with the Wisconsin Diagnosis Breast Cancer (WDBC) Dataset / Mode of access: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5555532/.

12. Yang-Kuei Lin (2018) Scheduling efficiency on correlated parallel machine scheduling problems // Operational Research. Vol. 18, Issue 3.

13. Yudong Zhang, Saeed Balochian, Praveen Agarwal, Vishal Bhatnagar, Orwa Jaber Housheya (2014) Artificial Intelligence and Its Applications // Mathematical Problems in Engineering. Article ID 840491. doi:http://dx.doi.org/10.1155/2014/840491

Статтю подано до редакції 19.10.2020

УДК: 517.9 DOI 10.33111/mise.99.5

Джалладова І. А., д. фіз.-мат. наук,
професор кафедри комп’ютерної математики та інформаційної безпеки
Бабинюк О. І., к. е. н,
доцент кафедри комп’ютерної математики та інформаційної безпеки
Лютий О. І., к.т.н.,
доцент кафедри комп’ютерної математики та інформаційної безпеки,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

Dzhalladova I. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics,
Professor Head of the Department of Computer Mathematics and Information Security
Babynuk O. I., Candidate of Economic Sciences,
Associate Professor of the Department of Computer Mathematics and Information Security
Liutyj O. I., Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor of the Computer Mathematics and Information Security Department, SHEI KNEU named after V. Hetman

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЗАГРОЗ СОЦІО-БЕЗПЕКИ В УМОВАХ ПАНДЕМІЇ

MODIFICATION OF RESEARCH METHODS THE SYSTEM OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH RANDOM COEFFICIENTS FOR ANALYSIS OF SOCIO-SECURITY THREATS IN A PANDEMIC CONDITION

Анотація. *В роботі досліджено модельну задачу побудови і аналізу стійкості стану соціо-безпеки з точки зору загроз, які склалися для населення країн світу в теперішній час в умовах невизначеності, знайдено умови її стабілізації в окремому напрямі. В якості інструментарію запропоновано модифікацію асимптотичних методів і модель, яка описується різницевими рівняннями з випадковими марковськими коефіцієнтами, бо марковські процеси найадекватніше відображають реальну ситуацію зі стрибками показників кількості хворих. Дослідження є початком циклу робіт, присвячених ґрунтовному вивченню усіх факторів соціо-безпеки з поданням її як функції багатьох змінних. Кожна змінна описує окрему загроза соціо-безпеки. Остаточна мета теоретичного дослідження у вузькому сенсі — побудова інтегральних показників складових загроз соціо-безпеки для їх вимірювання і оцінки. Метою в широкому сенсі є його практичне застосування на основі отриманих показників, формулювання у вигляді алгоритмів рекомендацій державним установам шляхів запобігання соціальних потрясінь. Запропонувати концепцію, щодо здатності суспільства зберігати свою сутність у невизначених умовах постійних змін і зберігати стабільний стан суспільства як по окремим напрямам, так і в цілому. Апарат різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами дуже добре підходить для моделювання майже всіх загроз соціо-безпеки. Будуємо і вивчаємо математичні моделі, що пов'язані з вимірами кількості хворих. Отримані умови стійкості пояснюють стан суспільства. Можна також сформулювати напрями дій для практиків із застосуванням умов стійкості. Розуміння нових умов співіснування у світі під час пандемії ставить на перше місто різноманітність досліджень заради ЛЮДИНИ. Тому робота є актуальним науковим дослідженням, має теоретичну і практичну цінність.*
Ключові слова: *асимптотичні методи; соціо-безпека; стійкість; марковський процес; невизначеність; пандемія; системний аналіз; активні хворі.*

Abstract. *The paper investigates the model problem of construction and analysis of the stability of the state of social security in terms of threats to the population of the world in our time in the uncertaintly of individual cities, the conditions of stabilization. As a tool, a modification of asymptotic methods and a model proposed by difference equations with random Markov coefficients are proposed, because they most adequately reflect the reality with jumps in the number of patients. The study is the beginning of a series of works devoted to a thorough study of all factors of social security with its presentation as a function of many variables. Each variable is a separate threat to social security. The ultimate goal of theoretical research in the narrow sense is to build integrated indicators of the components of social security threats for their measurement and evaluation. The purpose in a broad sense is its practical application on the basis of the received indicators, formulation in the form of algorithms of*

recommendations to state institutions of ways of prevention of social shocks. To propose a concept of the ability of society to preserve its essence in the uncertain conditions of constant change and to maintain a stable state of society in some areas and as a whole. The apparatus of difference equations with random coefficients is very well suited for modeling almost all social security threats. We build and study mathematical models related to measuring the number of patients. The obtained conditions of stability explain the state of society. It is also possible to formulate courses of action for practitioners using sustainability conditions. Understanding the new conditions of coexistence in the world during a pandemic puts in the first place a variety of research for the sake of MAN. Therefore, the work is a relevant scientific study, has theoretical and practical value.
Keywords: *asymptotic methods; socio-safety; stability; Markov process; uncertainty, pandemic; system analysis; active patients.*

Вступ. В глобальних умовах невизначеності дослідження загроз соціо-безпеки стає найважливішим і найактуальнішим для дослідників. Соціо-безпека [20] — це стан і характеристика міри досягнення оптимального рівня безпеки функціонування, розвитку суспільства, яке забезпечується сукупністю політичних, правових, економічних, організаційних, соціо-психологічних напрямів, які дозволяють зберігати соціальну стабільність в суспільстві. Індикатором соціо-безпеки є соціальна трансформація, а саме: нестійкість соціальних структур суспільства, процеси деградації, узурпація влади тощо. З цієї точки зору застосування математичних методів для дослідження зазначених, і багатьох інших процесів незаперечно. Особливо застосування добре розвинутих і модифікованих методів теорії стійкості та теорії керування для дослідження стійкості різних систем і підсистем суспільства. На сьогодні дослідники з усіх галузей намагаються допомогти владі справитеся з наслідками пандемії, допомогти людству вижити і вийти переможцями з незаперечно складної ситуації. Симбіоз методів і поставлені авторами задачі є оригінальними, хоча і спираються на дослідження багатьох вчених, які жили і творили раніше.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Особливу роль марковських процесів у сучасній теорії випадкових процесів і в її застосуванні для вирішування складних задач визнано й науковцями теоретиками, й практиками. Їх дослідженню присвячено велику кількість робіт, різних як по постановкам задач, так і по методам їх розв'язування. Часто ці методи використовують наявність у процесі деякої послідовності моментів зупинки, яка розбиває часову вісь на інтервали з достатньо простою поведінкою траєкторій. Найбільш вивченими процесами такого типу є стрибкоподібні процеси, теорія яких викладена в класичних монографіях Й.І. Гіхмана і А.В. Скорохода, Д. Дуба [5]. Спроба побудувати основи теорії марковських процесів, поведінка яких на інтервалах між стрибками не тривіальна, була зроблена в роботах Ш. Ватанабе, Н. Ікеда та інших авторів. У цих роботах розглядаються різні процедури побудови марковського процесу з частин. Ці побудови виявилися плідними в роботах А.В. Скорохода [16, 17] й інших авторів, спом'янутих вище, які вивчали дифузійні розгалужені процеси. Обмеження, яким задовольняють характеристики цих процесів, дозволили отримати ряд істотних результатів, наявність яких пов'язана не тільки з достатньо складною поведінкою дифузійних розгалужених процесів між своїми стрибками і не тільки з многовидом явищ, що обумовлено розгалуженням. Складні пуассоновські процеси із затримкою в нулі, а також спільні кусково–лінійні процеси, детально досліджені в численних роботах В.С. Королюка, Б.В. Гнеденко, І.М. Коваленко та ін.

У роботі Є.Ф. Царкова [19] надано строго математичне обґрунтування алгоритму зведення рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = A(y(t))X ,$$

де A — неперервна матрична функція, $\{y(t)\}$ — стохастичний, феллеровський марковський процес на компактні, до рівняння зі сталими коефіцієнтами для математичного сподівання розв'язку X

$$\frac{dM}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \ \overline{A}_k\right) \cdot M , \ M \equiv E\{X(t)\}.$$

Досліджується експоненціальна стійкість у середньому квадратичному розв'язків цієї системи.

Тривіальний розв'язок називається експоненціально стійким у середньому квадратичному, якщо існують такі додатні сталі N, γ, що при всіх $t \in R_t, X \in R^n \ \ y \in Y$ для розв'язків по початковим даним виконується нерівність

$$M\left\{\left|(x)\right|^2\right\} \leq Ne^{-yt}\left|x\right|^2 .$$

У багатьох задачах теорії керування виникає задача про стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь, яка після перетворень приймає вид

$$\frac{dX}{dt} = AX + \mu F(X, \mu), \ F(0, \mu) \equiv 0 ,$$

де $F(X, \mu)$ — вектор-функція, яка розкладається в ряд по степенях малого параметра μ і диференційована достатню кількість разів по X, μ. Було доведено, що велику роль при поданні розв'язку у вигляді розкладу в ряд по малому параметру грає стійкість розв'язків породжуючої системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = AX .$$

Асимптотичний метод наближеного інтегрування диференціальних рівнянь був розроблений у роботах Н. Ньютона, Л. Ейлера, Л. Лагранжа, П. Лапласа, К. Делоне, М. Ліндсмедта, А. Пуанкаре і багатьох інших. Ці методи застосовувалися, як правило, для розв'язування задач небесної механіки, що описувалися канонічними диференціальними рівняннями. Деякі варіанти асимптотичного інтегрування були пов'язані з використанням операції усереднення за часом t

$$P(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t,x)dt \equiv E\{F(t,x)\}.$$

Операція усереднення застосовувалася у роботах Б. Ван-дер-Поля, Л.І. Мандельштама, Н. Л. Папалексі та інших. У цих роботах побудова усередненої системи вже не була пов'язана з канонічністю системи диференціальних рівнянь. З іншої сторони розроблявся метод нормальних форм у роботах А. Пуанкаре, Дж Беркгофа, К. Загеля, А.Д. Брюно, А.П. Маркєєва і багатьох інших. З'ясувалося, що асимптотичний метод є способом зведення системи диференціальних рівнянь до нормальної форми. Інший, більш простий і алгоритмічний метод складається з застосування асимптотичного методу [1—4, 12—15] та його модифікацій і розвинення в роботах [6—8]. Інструментарій дуже добре працює при моделюванні різноманітних явищ економіки, політики, фінансах тощо [9—11]. У даній роботі було зроблено першу спробу застосувати модифікований алгоритм до дослідження проблем, пов'язаних з головною тематикою сучасності — безпекою людини.

Постановка проблеми. Метою статті є побудова моделі та аналіз стійкості ситуації із кількістю осіб, що захворіли на COVID-19 у містах України. Розв'язання цієї проблеми привело до необхідності модифікації існуючих підходів, а саме удосконалення метода асимптотичних методів дослідження різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами. За допомогою нового підходу вдалося дослідити стійкість одного з впливових факторів соціо-безпеки в умовах невизначеності (умовах пандемії) — виміру кількості осіб, що активно хворіють.

Основний результат. Розглянемо асимптотичний метод побудови системи різницевих рівнянь для математичного сподівання випадкового розв'язку системи лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами. Вважається, що для випадкового процесу, що визначає значення коефіцієнтів, відомі багатовимірні закони розподілу. Найпростіші результати отримані для випадку, коли випадковий процес є марковським ланцюгом [1].

Загальну схему асимптотичного методу розглянемо на моделі, що описується системою різницевих рівнянь

$$x_{n+1} = x_n + \mu F(n, x_n, \xi_n), (n = 0,1,2,\ldots) \quad (1)$$

де μ — малий параметр, ξ_n — випадковий процес з відомими багатовимірними щільностями розподілу

$$P_1(n, \xi), P_2(n, n_1, \xi, \xi_1), P_3(n, n_1, n_2, \xi, \xi_1, \xi_2) \ldots \quad (2)$$

Вектор $F(n, x, \xi)$ вважається достатньо кількість разів диференційованим по xта інтегрованою по ξ в області D

$$D = \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \|x\| < \infty, |\xi| < \infty\} \quad (3)$$

Шукаємо випадковий розв'язок x_n у вигляді асимптотичного розкладу по степеням параметру

$$x_n = y_n + \sum_{k=1}^{N} \mu^k \psi_k(n, y_n, \xi_n) + O(\mu^{N+1}) \quad (4)$$

де y_n — математичне сподівання випадкового розв'язку x_n

$$y_n = E\{x_n\}, (n = 0,1,2,\ldots)$$

$\{\blacksquare\}$— символ математичного сподівання. Вважаємо, що

$$\langle \psi_k(n, y_n, \xi_n) \rangle \equiv 0, (k = 1, \ldots, N; n = 0,1,2,\ldots) \quad (5)$$

Шукаємо детерміновану систему різницевих рівнянь, якій задовольняє вектор y_n

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^{N} \mu^k \Phi_k(n, y_n) + O(\mu^{N+1}) \quad (6)$$

Підставляючи розклади (4) та (6) в систему (1), приходимо до системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^{N}\mu^k\Phi_k(n,y_n)+\sum_{k=1}^{N}\mu^k\Phi_k(n+1,y_n+\sum_{s=1}^{N}\mu s\Phi_s(n,y_n)\,\xi_{n+1})=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\mu^k\Phi_k(n,y_n,\xi_n)+\mu F(n,y_n+\sum_{k=1}^{N}\mu^k\Phi_k(n,y_n,\xi_n),\xi_n)+O(\mu^{N+1}) \quad (7)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру приходимо до системи різницевих рівнянь виду:

$$\psi_1(n+1,y_n,\xi_{n+1})-\psi_1(n,y_n,\xi_n)+\Phi_1(n,y_n)=F(n,y_n,\xi_n)$$
$$\psi_k(n+1,y_n,\xi_{n+1})-\psi_k(n,y_n,\xi_n)+\Phi_k(n,y_n)=F(n,y_n,\xi_n),$$
$$(k=2,\ldots,N) \quad (8)$$

де $F(n,y_n,\xi_n)$ — відомий вектор, що виражається через $\Phi_j(n,y_n)$, $\psi_j(n,y_n,\xi_n)(j=1,2,\ldots,k-1)$.

З системи рівнянь (8) та умови (5) знаходимо:

$$\Phi_1(n,y_n)=\langle F(n,y_n,\xi_n)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}F(n,y_n,\xi_n)P(n,\xi)d\xi$$

$$\Phi_k(n,y_n)=\langle F(n,y_n,\xi_n)\rangle,(k=2,\ldots,N) \quad (9)$$

В другому наближенні матимемо систему різницевих рівнянь:

$$\psi_2(n+1,y_n,\xi_{n+1})-\psi_2(n,y_n,\xi_n)+\Phi_2(n,y_n)=$$

$$=\frac{DF(n,y_n,\xi_n)}{Dy_n}\psi_1(n,y_n,\xi_n)-\frac{D\psi_1(n+1,y_n,\xi_{n+1})}{Dy_n}\Phi_1(n,y_n) \quad (10)$$

Із (10) знаходимо:

$$\Phi_2(n,y_n)=E\left\{\frac{DF(n,y_n,\xi_n)}{Dy_n}\psi_1(n,y_n,\xi_n)\right\}.$$

З першого рівняння (8) знаходимо:

$$\psi_1(n,y_n,\xi_n)=\sum_{s=0}^{n-1}(F(s,y_s,\xi_s)-\Phi_1(s,y_s)),\ \psi_1(0,y_0,\xi_0)\equiv 0,$$

$$\Phi_2(n,y_n)=E\left\{\frac{DF(n,y_n,\xi_n)}{Dy_n}\sum_{s=0}^{n-1}\big(F(s,y_s,\xi_s)-\Phi_1(s,y_s)\big)\right\} \quad (11)$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(n, s, \xi, \eta) \frac{DF(n, y_n, \xi)}{Dy_n} (F(s, y_n, \eta) - \Phi_1(s, y_s)) d\xi d\eta$$

Аналогічно знаходяться інші вектори $\Phi_k(n, y_n)$, $(k = 3, \dots, N)$ [2].

Асимптотичний метод спрощується для системи лінійних різницевих рівнянь

$$x_{n+1} = x_n + \mu \mathrm{A}(n, \xi_n) x_n \tag{12}$$

де $\mathrm{A}(n, \xi_n)$ — матриця, що залежить від випадкового процесу ξ_n. Випадковий розв'язок x_n шукається у вигляді асимптотичного розкладу по степеням параметру μ

$$x_n = y_n + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \psi_k(n, \xi_n) y_n \tag{13}$$

де y_n — математичне сподівання вектору x_n. При цьому виконані умови

$$E\{\psi_k(n, \xi_n)\} \equiv 0 \tag{14}$$

Ми шукаємо систему різницевих рівнянь, якій задовольняє вектор $y_n = E\{\mathrm{x}_n\}$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \beta_k(n) y_n \tag{15}$$

Підставляючи розклади (13) та (15) в систему різницевих рівнянь (12), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{gathered}(I + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \psi_k(n+1, \xi_{n+1}))\, (I + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \beta_k(n)) = \\ (I + \mu \mathrm{A}_k(n, \xi_n))(I + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \psi_k(n, \xi_n)),\end{gathered} \tag{16}$$

яка розпадається на нескінчену систему лінійних матричних різницевих рівнянь

$$\begin{gathered}\psi_1(n+1, \xi_{n+1}) - \psi_1(n, \xi_n) + \mathrm{B}_1(n) = \mathrm{A}(n, \xi_n) \\ \psi_k(n+1, \xi_{n+1}) - \psi_k(n, \xi_n) + B_k(n) = \sum_{s=1}^{k-1} \psi_s(n+1, \xi_{n+1}) B_{k-s}(n) = \\ = A(n, \xi_n) \psi_{k-1}(n, \xi_n) \qquad (k = 2,3,\dots)\end{gathered} \tag{17}$$

З системи рівнянь (17) знаходимо матриці $\mathrm{B}_k(n)$ $(k = 1,2,\ldots)$:

$$\mathrm{B}_1(n) = \langle A(n,\xi_n)\rangle,$$

$$\mathrm{B}_k(n) = \langle A(n,\xi_n)\psi_{k-1}(n,\xi_n)\rangle, (k = 2,3,\ldots) \tag{18}$$

які виражені через математичне сподівання від відомих матриць. Для знаходження $\mathrm{B}_k(n)$ необхідно знати к – мірну щільність ймовірності. Зокрема, маємо формули

$$\mathrm{B}_1(n) = E\{A(n,\xi_n)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{A}(n,\xi)\, P_1(n,\xi) d\xi \tag{19}$$

При $\psi_1(0,\xi_0) \equiv 0$, знаходимо з першого рівняння (17) системи:

$$\psi_1(n,\xi_n) = \sum_{s=0}^{n-1}\big(A(s,\xi_s) - B_1(s)\big).$$

Це дозволяє обчислити $\mathrm{B}_2(n)$

$$\mathrm{B}_2(n) = \Big\langle A(n,\xi_n) \sum_{s=0}^{n-1}\big(A(s,\xi_s) - B_1(s)\big)\Big\rangle =$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(n,s,\xi,\eta) \mathrm{A}(n,\xi)(A(n,\eta) - B_1(s)) d\xi d\eta \tag{20}$$

Аналогічно можуть бути обчислені $\mathrm{B}_k(n)$ $(k = 3,4,\ldots)$.
Нехай відомі значення для випадкового процесу ξ_n, ξ_{n_1}, ξ_{n_s}:

$$P_k(n),\ P_{k,k_1}(n,n_1),\ \ldots,\ P_{k,k_1,\ldots,k_s}(n,n_1,n_2,\ldots,n_s)$$

При цьому формули (19), (20) заміняться іншими

$$\mathrm{B}_1(n) = \sum_{k=1}^{q} A(n,\Theta_k)\, P_k(n)$$

$$\mathrm{B}_2(n) = \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k,l=1}^{q} A(n,\Theta_k)(A(s,\Theta_l) - B_1(s))\, P_{kl}(n,s) \tag{21}$$

Наведемо розрахункові формули для обчислення математичних сподівань у випадку, коли ξ_n є скінчено значним марковським ланцюгом, який приймає значення Θ_k $(k = 1,\ldots,q)$ з ймовірностями $P_k(n)$

$$P_k(n) = P\{\xi_n = \Theta_k\}, (k = 1,\ldots,q) \tag{22}$$

Вважаємо, що вектор ймовірностей, задовольняє системі рівнянь:

$$P(n+1) = \Pi(n)P(n), p(n) = \begin{pmatrix} P_1(n) \\ \vdots \\ P_q(n) \end{pmatrix} \quad (23)$$

Елементи $\Pi_{ks}(n)$ матриці $\Pi(n)$ можна розглядати як умовні ймовірності переходу з s-го стану k- ий стан [1]

$$\Pi_{ks}(n) = P\{\xi_{n+1} = \Theta_k | \xi_n = \Theta_n\},(k, s = 1, \dots, q) \quad (24)$$

Введемо в розгляд фундаментальну матрицю роз в'язків системи різницевих рівнянь (23)

$$N(s,n) = \Pi(s-1)\Pi(s-2)\dots\Pi(n)\ s > n \quad (25)$$

При цьому вважаємо

$$N(n+1,n) = \Pi(n), N(n,n) = I(n = 0,1,2, \dots) \quad (26)$$

Позначимо елементи матриці $N(s,n)$ через $\nu_{kj}(s,n)$ $(k, j = 1, \dots, q)$. Для марковського випадкового ланцюга маємо перехідні ймовірності

$$\nu_{kj}(s,n) = P\{\xi = \Theta_k | \xi_n = \Theta_j\},(k, j = 1, \dots, q) \quad (27)$$

Тому за умови $n \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s$ можна обчислити сумісні ймовірності розподілів за формулою

$$P_{k,k_1,\dots,k_s}(n, n_1, n_2, \dots, n_s) =$$
$$\nu_{k,k_1}(n, n_1)\nu_{k_1,k_2}(n_1, n_2) \dots \nu k_{s-1}, k_s(n_{s-1}, n_s)P_{ks}(ns) \quad (28)$$

Нехай задана функція від випадкового процесу $a(n, \xi_n)$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \dots)$. Позначимо частинні значення:

$$a(n) = \mathrm{a}(n, \Theta_k), (k = 1, \dots, q) \quad (29)$$

і знайдемо формулу для пошуку математичного сподівання

$$\left\langle a(n, \xi_n)\mathrm{a}\left(n_1, \xi_{n_1}\right) \dots a\left(n_s, \xi_{n_s}\right)\right\rangle =$$

$$= \sum_{k,k_1,\dots,k_s=1}^{q} P_{k,k_1,\dots,k_s}(n, n_1, \dots, n_s) a_k(n) a_{k_1}(n_1) \dots a_{k_s}(n_s)$$

$$= \sum_{k,k_1,\dots,k_s=1}^{q} a_k(n) \nu_{k,k_1}(n, n_1) a_k(n) a_{k_1}(n_1) \dots$$

$$\nu_{k_{s-1}}(n_{s-1}, n_s) a_{k_s}(n_s)$$

$$P_{k_s}(n_s) \qquad (30)$$

Формулу (30) можна записати через діагональні матриці:

$$A(n) = \begin{pmatrix} a_1(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(n) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_q(n) \end{pmatrix} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

і вектор $\mathrm{C}(1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$, $dim\, C = q$:

$$E\{a(n, \xi_n)\mathrm{a}(n_1, \xi_{n_1}) \dots a(n_s, \xi_{n_s})\} =$$

$$\mathrm{C}\mathrm{A}(n) N(n, n_1) \mathrm{A}(n_1) \dots N({}^{s}n_{s-1}, n_s) \mathrm{A}(n_s) P(s) \qquad (31)$$

Якщо марковський ланцюг є однорідним, тобто матриця $\Pi(n) = \Pi$ в системі різницевих рівнянь (23) є сталою, то

$$\{a(n, \xi_n)\mathrm{a}(n_1, \xi_{n_1}) \dots a(n_s, \xi_{n_s})\} =$$

$$\mathrm{C}\mathrm{A}(n) \Pi^{n-n_1} \mathrm{A}(n_1) \dots \Pi^{(n_{s-1}-n_s)} \mathrm{A}(n_s) P(s), n \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s$$

Модельна задача. Дослідимо ситуацію з кількістю хворими на СОВІД в деякому місці на при кінці 2020 року, яка описується різницевим рівнянням першого порядку:

$$x_{n+1} = x_n + \mu \mathrm{a}(\xi_n) x_n \qquad (32)$$

де випадковий процес ξ_n може приймати 2 стани. В першому стані кількість активно хворих є додатним числом, а в другому стані від'ємним числом. Активно хворими особами прийнято вважати різницю між кількістю осіб, що захворіли і тих хто вилікувався, і, як не було би сумно, померлі. Система стрибком може переходити із одного стану в інший. Функція а, яка залежить від випадкового процесу приймає два значення $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$ з ймовірностями $\mathrm{P}_1(n), P_2(n)$, які задовольняють з огляду марковськості описаної ситуації наступну систему рівнянь

$$\mathrm{P}_1(n+1) = (1-\alpha)P_1(n) + \beta P_2(n),$$

$$\mathrm{P}_2(n+1) = \alpha P_1(n) + (1-\beta)P_2(n), \qquad (33)$$

де $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ і $0 < \alpha + \beta < 2$.

Вважаючи

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix},$$

знаходимо функцію від матриці П [3]

$$\Pi^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} \qquad (34)$$

Знаходимо розв'язок рівняння (33) у вигляді:

$$x_n = y_n + \mu\psi_1(n,\xi_n)y_n + \mu^2\psi_2(n,\xi_n)y_n + \ldots, \qquad (35)$$

де $y_n = \langle x_n \rangle$ задовольняє детермінованому різницевому рівнянню:

$$y_{n+1} = y_n + \mu B_1(n)y_n + \mu^2 b_2(n)y_n \qquad (36)$$

Позначимо $a_k = \mathrm{a}(\Theta_k)(k = 1,2)$, $P_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$,$P_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, за (21):

$$b_1(n) = \langle a(\xi_n) \rangle = a_1 P_1 + a_2 P_2 = \frac{a_1\beta + a_2\alpha}{\alpha+\beta} = b_1 \qquad (37)$$

З різницевого рівняння $\psi_1(n+1,\xi_{n+1}) - \psi_1(n,\xi_n) + b_1(n) = a(\xi_n)$ знаходимо при $\psi_1(0,\xi_0) \equiv 0$ вираз для функції $\psi_1(n,\xi_n)$

$$\psi_1(n,\xi_n) = \sum_{s=0}^{n-1}(a(\xi_n) - b_1).$$

Обчислюємо коефіцієнт $b_2(n)$ за формулою (32):

$$b_2(n) = \langle a(\xi_n) \sum_{s=0}^{n-1}(a(\xi_n) - b_1)\rangle = CA(\Pi^{n-1} +$$

$$\Pi^{n-2} + \ldots + \Pi)(A - b_1 E)P,$$

де $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{a}_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_1 \\ \mathrm{P}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\mathrm{C} = (1 \quad 1)$.

Використовуючи формулу (35) отримаємо

$$b_2(n) = \frac{(a_1 - a_2)^2 \alpha\beta}{(\alpha+\beta)^3}(1 - \alpha - \beta - (1 - \alpha - \beta)^n),$$

$$b_2 = \lim_{n\to\infty} b_2(n) = \frac{(a_1 - a_2)^2 \alpha\beta}{(\alpha+\beta)^3}(1 - \alpha - \beta).$$

Різницеве рівняння (37) приймає вигляд

$$y_{n+1} = (1 + \mu \frac{a_1\beta + a_2\alpha}{\alpha+\beta} + \mu^2 \frac{(a_1 - a_2)^2 \alpha\beta(1 - \alpha - \beta)}{(\alpha+\beta)^3} + O(\mu^3))y_n. \quad (38)$$

З рівняння (38) випливає, що нульовий розв'язок різницевого рівняння (32) з випадковими коефіцієнтами буде стійкий в середньому, якщо виконана умова

$$\mu \frac{a_1\beta + a_2\alpha}{\alpha+\beta} + \mu^2 \frac{(a_1 - a_2)^2 \alpha\beta(1 - \alpha - \beta)}{(\alpha+\beta)^3} + O(\mu^3) < 0, |\mu| > 0. \quad (39)$$

Якщо вважати перехід із одного стану в інший рівно ймовірним, то дістанемо умову $\mu\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\right) < 0$ стійкості стану ситуації із захворюваності в тому чи іншому місті. Значення a_1, a_2, α, β задаються, враховуючи офіційні статистичні дані.

Покажемо, що рівняння (38) можна знайти за допомогою моментних рівнянь [4]. Для частинних моментів $m_k(n)$ першого порядку матимемо систему різницевих рівнянь:

$$m_1(n+1) = (1-\alpha)(1 - \mu \mathrm{a}_1)m_1(n) + \beta(1 + \mu \mathrm{a}_2)m_2(n),$$

$$m_2(n+1) = \alpha(1 + \mu \mathrm{a}_1)m_1(n) + (1-\beta)(1 + \mu \mathrm{a}_2)m_1(n). (40)$$

Вводимо змінні $m(n) = m_1(n) + m_2(n)$, $v(n) = \frac{\beta m_2(n) - \alpha m_1(n)}{\alpha+\beta}$.

Отримаємо систему різницевих рівнянь:

$$m(n+1) = m(n) + \mu \frac{a_1\beta + a_2\alpha}{\alpha+\beta} m(n) + \mu(a_2 - a_1)v(n),$$

$$v(n+1) = \mu(a_1 - a_2) \frac{\alpha\beta(\beta+\alpha-1)}{(\alpha+\beta)^2} m(n) + (1-\alpha-\beta)(1+$$

$$\mu \frac{a_1\beta + a_2\alpha}{\alpha+\beta})v(n) \qquad (41)$$

В першому наближенні знаходимо інтегральний многовид розв'язків системи (42)

$$v(n) = \mu(a_1 - a_2) \frac{\alpha\beta(\beta+\alpha-1)}{(\alpha+\beta)^2} m(n) + O(\mu^2)$$

і для змінної $m(n)$ знаходимо рівняння:

$$m(n+1) = \left(1 + \mu \frac{a_1\beta + a_2\alpha}{\alpha+\beta} + \mu^2 \frac{(a_1-a_2)^2\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^3} + O(\mu^3)\right) m(n),$$

яке співпадає з рівнянням (39).

Потрібно відмітити, що застосування моментних методів [8] до нелінійної системи різницевих рівнянь досліджено, знайдено умови стійкості, але застосування для реальних задач досить громіздко. З урахуванням чисельних методів та засобів комп'ютерної математики такі спроби були зроблено і вони досить вдалі [21].

Висновки. Таким чином, дослідження стійкості в середньому і середньому квадратичному розв'язків диференціального рівняння (1) з коефіцієнтами, які залежать від дискретного марковського процесу, завдяки використанню моментних рівнянь, викладених в [6], вдалося звести до розв'язуванню систем звичайних диференціальних рівнянь. Отриманий підхід застосовано до побудови та аналізу умов стійкості відновлення населення в умовах пандемії.

Бібліографічні посилання

1. Валеев К.Г., Джалладова И.А. Исследование устойчивости решений системы линейных разностных уравнений со случайными. ДАН України. 2006. № 6. С. 7-9

2. Валеев К.Г., Стрижак. О.Л. Метод моментных уравнений АН УССР, Ин-т электродинамики К., 1985. 56 с.

3. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Операційне числення та його застосування. К.: КНЕУ, 2003. 295 с.

4. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Оптимізація випадкових процесів. К.: КНЕУ, 2006. 310 с.

5. Doob D. L. Martingals and one — dimentional diffusion. TAMS. 1955. 78. P. 168 — 208.

6. Джалладова І. А. Оптимизація стохастичних систем: монографія. К.: КНЕУ, 2005. 221 с.

7. Джалладова І. А. Условия существования асимптотических систем для уравнений с запаздыванием. Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Серия: Кибернетика. 2007. № 7. С. 54—56.

8. Dzhalladova I. A. Research stability of solutions of the systems linear with random coefficient. Studies of the university of Zilina MATHEMATICAL SERIES Zilina, Slovak Republik., Vol. 23/2009. P. 37-43.

9. Dzhalladova I.A., Ruzickova M., Michalkova M. Modeling of applied problems by stochastic systems and their analysis using the moment equations. Adv. Difference Eq. 2013, 2013:152. URL: https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-152

10. Dzhalladova I.A. Moment Equations in Modeling a Stable Foreign Currency Exchange Market in Conditions of Uncertainty. Abstract and Applied Analysis vol. 2013, URL: https://doi.org/10/1155/2013/172847

11. Dzhalladova I. A. Differential and Difference Equations with applications. Springer Proceeding in Mathematics &Statistics.Vol. 47, 2013. 560 p.

12. Зубов В.И. Интерполяция и аппроксимация вероятностных распределений. ДАИ СССР. 1991. Т. 316, № 6. С. 1298—1301.

13. Кац И.Я., Красовський Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. Прикладная математика и мех.1960. т.24. №5. С. 809–823.

14. Мартынюк А.А. Практическая устойчивость движения. Киев, Наукова думка, 1983. 248 с.

15. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. Л.: Судпромгиз, 1961. 252 с.

16. Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964, 280 с.

17. Скороход А.В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений. К: Наукова думка, 1987. 328 с.

18. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов.радио, 1977. 488 с.

19. Царьков Е.Ф. Марковские возмущения параметров линейных дифференциальных уравнений. Эргодические теоремы и марковские процессы. Киев, 1967. 56 с

20. Человек и Наука. URL: http://cheloveknauka.com

21. Dzhalladova I., Růžičková M. A Dynamical System with Random Structure and their Applications. Cambridge Scientific Publishers 2020, 244 pp.

Статтю подано до редакції 20.10.2020